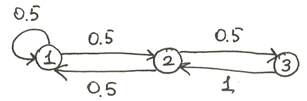
**Цепи Маркова в дискретном времени**

**№1.** Найдите стационарное распределение, которое соответствует матрице переходных вероятностей:

https://lh5.googleusercontent.com/DzReDQNb0Xq3eXpoJ1rAy2dTPP9PqHYr31CP3ujuW6Nsh-qBQ9alMTalmR5u--G_95SccvsM9gnQICsbtFHCqh-gg7Oz1ee-vSYXeSw_Opw-_M21X1jbhDnvAy6hfLC7Psq_cqtVx7eDkgSRB2ekJ3hrg6rIUBvCAqMshomSTVbrsjULGpng4XwNHI1b

Сходится ли к процесс к стационарному распределению?



Решение.

Цепь неразложимая? Да.

Цепь периодическая? Нет.

Найдём стационарные вероятности

Нас интересует только стац. решение:

(1)

(2)

(3)

(4)

Из (1) и (2):

Получаем, что вероятности состояний 1, 2 и 3 соотносятся 2:2:1, так что

Вывод: цепь неразложимая, апериодическая, существует стационарное распределение с ненулевыми вероятностями состояний => цепь эргодическая, **процесс сходится к стационарному распределению**.

**№2.** Система бывает в двух состояниях: свободном и занятом. Если система свободна в момент , к моменту она станет занятой с вероятностью . Если система занята в момент , она освободится к моменту с вероятностью . Переходы совершаются независимо от истории процесса, так что система функционирует как цепь Маркова.

а) Какую долю времени система проводит в занятом, а какую — в свободном состоянии?

б) В момент система простаивает. С какой вероятностью в момент она тоже будет свободна?

Решение. (а)

Матрица вероятностей переходов:

Система:

(1)

(2)

(3)

Подставим в (1):

Раскроем скобки и перегруппируем:

В стационарном режиме , так что

(б) В момент система простаивает. С какой вероятностью в момент она тоже будет свободна?

**№3. (сравниваем D/M/1/1 и D/M/2/2).** Предприниматель получает ровно один заказ в начале каждого рабочего дня. Если он свободен (не занят выполнением заказов), он принимает заказ и получает 200 рублей. Если он занят, то отказывается. Время исполнения заказа экспоненциально распределено согласно дополнительной функции распределения (интенсивность обслуживания — один заказ в день).

а) Рассчитайте вероятность отказа и среднюю дневную выручку.

б) Предприниматель озабочен высокой долей отказов. Он подумывает нанять работника, который бы исполнял заказы с тем же распределением времени исполнения. Пусть — число заказов на исполнении в начале рабочего дня (сразу после получения заказа). Тогда может принимать значения 1 и 2. Вот матрица вероятностей переходов для цепи (попробуйте её получить сами):

Рассчитайте стационарные вероятности, коэффициент загрузки мощностей (среднее число заказов на обслуживании) и вероятность отказа .

в) Предприниматель собирается платить работнику 40 рублей в день. Рассчитайте среднюю дневную прибыль и сравните со средней прибылью без работника . Стоит ли нанимать работника?

**Цепи Маркова в непрерывном времени**

**№4.** Which of the following are appropriate transition rate matrices? For each transition rate matrix determine if it corresponds to an irreducible chain and, if the chain is irreducible, find the steady-state probabilities.

1. , b) , c) .

Решение. В (b) положительные элементы на главной диагонали и отрицательные вне её — нельзя.

Сумма в каждой строке равна нулю — выполнено во всех матрицах.

Значит, матрицы (a) и (c) — матрицы интенсивностей переходов.

Матрица (a) соответствует неразложимой цепи: все состояния сообщаются.

Матрица (c) соответствует разложимой цепи: состояния 1 и 2 недостижимы из состояний 3 и 4.

Найдём стационарное распределение цепи (a).

Уравнения Колмогорова:

Ищем стационарное решение:

(1)

(2)

(3)

Подставим в (1):

**№5.** В сети два сервера, которые время от времени выходят из строя. Поломки наступают пуассоновским потоком, интенсивность которого для каждого сервера составляет λ. Если сервер выходит из строя, то время, которое требуется для его восстановления, распределено по показательному (экспоненциальному) закону с параметром μ.

Найдите долю времени, в течение которого ни один из серверов не работает, и среднее число работающих серверов. Решите задачу в двух случаях:

а) восстановлением серверов занимается одна команда сотрудников (так что если два сервера сломаны, то они восстанавливаются по очереди);

б) при выходе из строя двух серверов на оба сервера выделяется по команде.

Решение (а). Пусть — число работающих серверов. Возможные состояния: 0, 1 и 2.

Составим матрицу интенсивностей переходов.

Стационарное распределение:

(1)

(2)

(3)

(4)

Из (1):

Из (3):

Из (4): . — стационарное распределение.

*Доля времени, в течение которого ни один сервер не работает*: .

*Среднее число работающих серверов*:

Можно сделать красивее. Пусть . Тогда

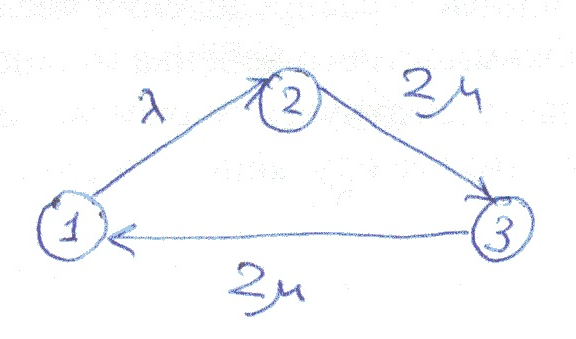
**№6.** Рассмотрите СМО M/E2/1/1 (одноканальная СМО без очереди, время обслуживания распределено по закону Эрланга) с интенсивностью поступления заявок λ и интенсивностью обслуживания μ.

а) Выпишите возможные состояния этой системы.

б) Выпишите матрицу интенсивностей переходов.

в) Найдите вероятности состояний в стационарном режиме.

г) Выпишите вероятность потерь.



**№7.** Решите предыдущую задачу для системы E2/M/1/1.

**№8.** Степан Никитин живёт в популярном среди туристов месте. Степан сдаёт коттедж туристам, которые прибывают пуассоновским потоком с интенсивностью 0.2 человека в день. Если коттедж свободен во время очередного прибытия, то клиент снимает его на экспоненциально распределённое время со средним 3 дня и платит 2000 рублей за день. Если коттедж занят, клиенту приходится искать другое место.

а) Опишите систему нотацией Кендалла.

б) Рассчитайте вероятность того, что турист, заселившийся два дня назад, пробудет в коттедже ещё не менее двух дней.

в) Рассчитайте долю туристов, которых Степану удаётся обслужить.

г) Рассчитайте средние дневные потери выручки из-за ограниченной ёмкости системы.

Решение.

(а) M/M/1/1

Интенсивность входящего потока

Интенсивность обслуживания

(б) Пусть — время пребывания, . Нужно найти

Или так:

(в) Вероятность потери в M/M/1/1 = вероятность занятости = .

туристов теряем =>  **обслуживаем**.

г) Теряем от общего числа туристов. Туристы прибывают в среднем 0.2 чел/день. Следовательно, в день мы теряем в среднем человека.

Турист платит руб в среднем.

Средние дневные потери выручки: руб.

Из-за ограниченной ёмкости Степан теряет в среднем 450 руб. в день.